موسسه تدریس خصوصی

مدرسین تهران

- تدریس خصوصی دروس دانشگاهی: مقاطع دکتری، کارشناسی ارشد، کارشناسی
- آموزش نرم‌افزارهای تخصصی: تمامی رشته های مهندسی
- ترجمه متون تخصصی: تمامی رشته های دانشگاهی
- با همکاری اساتید دانشگاه ها: خانم و آقا

بسمه تعالی

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی

اداره امتحانات

سؤالات امتحانی سال تحصیلی مهر ۹۵-۹۴

محل ضرب مهر امتحانات

نام استاد: نام درس: ریاضی پیش رشته تحصیلی: مقطع: کارشناسی

تاریخ امتحان: ۹۵/۶/۳ مدت امتحان: ۱۲۰ در مجموع بارم از : استفاده از ماشین حساب

تعداد صفحه سوالات: ۲ پاسخ سوالات در: پاسخنامه ◯ برگه سوالات ⊗ پاسخنامه مخصوص سوالات چهارگزینه ای ◯ می‌باشد.

ضمناً نمرات در سایت stu.iauctb.ac.ir اعلام خواهد شد و دانشجویان جهت مشاهده نمرات و اعتراض به این سایت مراجعه نمایند.

ردیف	
۱-	حاصل عبارات زیر را بدست آورید. الف) $\dfrac{(1+i)^{100}}{(1-i)^{96}-i(1+i)^{98}}$ ب) $4+i-\dfrac{1}{3-i}$ ج) $\dfrac{i+i^2+i^3+i^4+i^5}{\overline{1+i}}$
۲-	مشتق توابع زیر را محاسبه نمایید الف) $y=(x^2+x+e)^{\sin x}$ ج) $y=\operatorname{Arccos}\dfrac{1+x}{1-x}$ ب) $y=\ln^5(\tan^3 x)$ د) $y\sin x = x^3\cos y$
۳-	با استفاده از تعریف حد ثابت کنید: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=+\infty$
۴-	اعداد a و b را طوری تعیین نمایید که تابع زیر روی IR پیوسته گردد. $f(x)=\begin{cases}2x+1 & x\le 3\\ ax+b & 3<x<5\\ x^2+2 & 5\le x\end{cases}$
۵-	معادله خط مماس بر منحنی $\begin{cases}x=1-\sin t\\ y=1+2\cos t\end{cases}$ را به ازای $t=\frac{\pi}{4}$ بیابید.

بسمه تعالی

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی

اداره امتحانات

سؤالات امتحانی سال تحصیلی ۹۵-۹۴

محل ضرب مهر امتحانات

استاد: | نام درس: ریاضی ۱ پایه | رشته تحصیلی: | مقطع:

تاریخ امتحان: ۹۵/۶/۳ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه | مجموع بارم از: | استفاده از ماشین حساب

تعداد صفحه سوالات: ۲ | پاسخ سوالات در: پاسخنامه ○ برگه سوالات ⊗ پاسخنامه مخصوص سوالات چهارگزینه ای ○ می‌باشد.

ضمناً نمرات در سایت stu.iauctb.ac.ir اعلام خواهد شد و دانشجویان جهت مشاهده نمرات و اعتراض به این سایت مراجعه نمایند.

- نقاط بحرانی تابع زیر را بدست آورید.

$$y=\cos^2 x-\sin^2 x-1$$

- مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که نقطه $(1,2)$ نقطه عطف تابع $f(x)=ax^3+bx^2$ باشد.

- نامساوی زیر را ثابت نمایید.

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \operatorname{Arctg} b-\operatorname{Arctg} a < \frac{b-a}{1+a^2}$$

- نمودار تابع زیر را رسم نمایید.

$$f(x)=4x^4+4x^3+1$$

موفق باشید

حل الف) بهتر است از فرم قطبی اعداد استفاده شود:

$$(1+i)^{100}=\left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^{100}=(\sqrt{2})^{100}e^{\frac{100\pi}{4}i}=2^{50}e^{25\pi i}$$
$$=2^{50}e^{\pi i}=2^{50}(\cos\pi+i\sin\pi)=2^{50}(-1)=-2^{50}$$

$$(1-i)^{96}\left(\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^{96}=(\sqrt{2})^{96}e^{-\frac{96\pi}{4}i}=2^{48}e^{-24\pi i}=2^{48}$$

$$(1+i)^{98}=\left(\sqrt{2}^{\frac{\pi}{4}i}\right)^{98}=(\sqrt{2})^{98}e^{\frac{98\pi}{4}i}=2^{49}e^{(24\pi+\frac{\pi}{2})i}$$
$$=2^{49}e^{\frac{\pi}{2}i}=2^{49}\left(5\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=2^{49}i$$

$$\frac{(1+i)^{100}}{(1-i)^{96}-i(1+i)^{98}}=\frac{-2^{50}}{2^{48}-2^{49}i^2}=\frac{-2^{50}}{2^{48}+2^{49}}=-\frac{2^2}{1+2}=-\frac{4}{3}$$

ب)

$$4+i-\frac{1}{3-i}=4+i-\frac{1}{3+i}\times\frac{3-i}{3-i}=4+i-\frac{3-i}{9-i^2}$$
$$=4+i-\frac{3-i}{9+1}=4+i-\frac{3}{10}+\frac{1}{10}i=\frac{37}{10}+\frac{11}{10}$$

ج)

$$\frac{1+i^2+i^3+i^4+i^5}{1+i}=\frac{i-1-i+1+i}{1-i}=\frac{i}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}$$
$$=\frac{i+i^2}{1-i^2}=\frac{i-1}{1-(-1)}=\frac{i-1}{2}$$

۲) مشتق توابع زیر را محاسبه نمایید:

الف) $y = (x^۲ + x + e)^{\sin x}$

ب) $y = \ln^۵(\tan ۳x)$

ج) $y = \arccos\left(\frac{۱+x}{۱-x}\right)$

د) $y \sin x = x^۳ \cos y$

حل الف)

$$\ln y = \ln(x^۲ + x + e)^{\sin x} = \sin x \ln(x^۲ + x + e)$$
$$\frac{y'}{y} = \cos x \ln(x^۲ + x + e) + \sin x \frac{۲x + ۱}{x^۲ + x + e}$$
$$y' = y\left(\cos x \ln(x^۲ + x + e) + \sin x \frac{۲x + ۱}{x^۲ + x + e}\right)$$

ب)

$$y' = ۳(۵)\frac{۱ + \tan^۲(۳x)}{\tan(۳x)} \ln^۴(\tan(۳x))$$

ج)

$$y' = \frac{-۱x - (-۱)(۱ + x)}{(۱ + x)^۲} \times \frac{-۱}{\sqrt{۱ - \left(\frac{۱+x}{۱-x}\right)^۲}}$$

د) با مشتق‌گیری ضمنی داریم:

$$f(x, y) = y \sin x - x^۳ \cos y = ۰$$
$$y' = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{y \cos x - ۳x^۲ \cos y}{\sin x - x^۳ \sin y}$$

۳) اعداد a, b را طوری تعیین نمایید که تابع زیر روی $\mathbb{R}$ پیوسته گردد.

$$f(x)=\begin{cases} ۲x+۱ & , \quad x\le ۳\\ ax+b & , \quad ۳<x<۵\\ x^۲+۲ & , \quad ۵\le x\end{cases}$$

حل بایستی حد چپ و حد راست و مقدار تابع $f(x)$ در نقاط $x_۰ = ۳, ۵$ باهم برابر باشند:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۳^-}(۲x+۱)=۲(۳)+۱=۷, f(۳)=۲(۳)+۱=۷\\ \lim\limits_{x\to ۳^+}(ax+b)=۳x+b\Rightarrow ۳a+b=۷\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۵^-}(ax+b)=۵a+b\\ \lim\limits_{x\to ۵^+}(x^۲+۲)۵^۲+۲=۲۷\end{cases}\Rightarrow ۵a+b=۲۷$$

$$\begin{cases}۳a+b=۷\\ ۵a+b=۲۷\end{cases}\Rightarrow ۲a=۲۰\Rightarrow a=۱۰\Rightarrow b=-۲۳$$

۴) معادلهٔ خط مماس بر منحنی $\begin{cases}x=۱-\sin t\\ y=۱+۲\cos t\end{cases}$ را به‌ازای $t=\frac{\pi}{۴}$ بیابید.

حل با مشتق‌گیری از تابع پارامتری داریم:

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-\cos t\\ \frac{dy}{dt}=-۲\sin t\end{cases}\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-۲\sin t}{-\cos t}=۲\tan t$$

$$t_۰=\frac{\pi}{۴}\Rightarrow\begin{cases}x_۰=۱-\sin(\frac{\pi}{۴})=۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\\ y_۰=۱+۲\cos(\frac{\pi}{۴})=۱+\sqrt{۲}\end{cases}$$

و $m=\frac{dy}{dx}(\frac{\pi}{۴})=۲\tan(\frac{\pi}{۴})=۲$. پس معادلهٔ خط مماس چنین است:

$$y-(۱+\sqrt{۲})=۲\left(x-\left(۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\right)$$

$$y = ۲x - ۲ + \sqrt{۲} + ۱ + \sqrt{۲}$$

$$y = ۲x + ۱ + ۲\sqrt{۲}$$

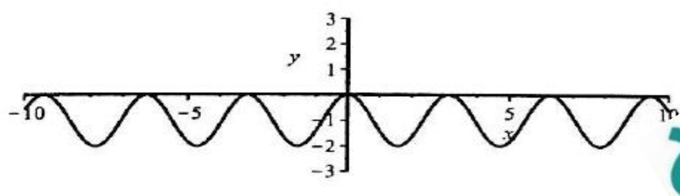
۵) نقاط بحرانی تابع $y = \cos^۲ x - \sin^۲ x - ۱$ را به‌دست آورید.

$\boxed{\text{حل}}$ برای یافتن نقاط بحرانی یک تابع، بایستی از آن مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$y' = -۲\sin x \cos x - ۲\sin x \cos x = -۴\sin x \cos x = -۲\sin ۲x = ۰$$

$$\sin ۲x = ۰ \Rightarrow ۲x = k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

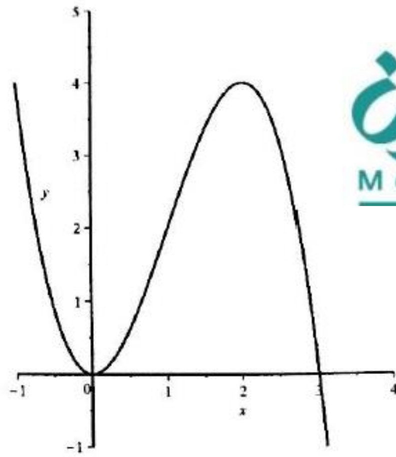
پس تمام نقاط $\dots, \pm\frac{۳\pi}{۲}, \pm\pi, \pm\frac{\pi}{۲}, ۰$، بحرانی هستند.



٦) مقادیر a, b را طوری تعیین کنید که نقطهٔ $(۱, ۲)$، نقطهٔ عطف تابع $f(x) = ax^۳ + bx^۲$ باشد.

$\boxed{\text{حل}}$ اولاً $f(۱) = ۲$ پس $a + b = ۲$. از طرفی برای نقطه عطف $x = ۱$ داریم: $f''(۱) = ۰$، حال چون $f'(x) = ۳ax^۲ + ۲bx$ پس $f''(x) = ٦ax + ۲b$ لذا $٦a + ۲b = ۰$. با حل دستگاه $\begin{cases} a + b = ۲ \\ ٦a + ۲b = ۰ \end{cases}$ داریم:

$$\begin{cases} -۲a - ۲b = -۴ \\ ٦a + ۲b = ۰ \end{cases} \Rightarrow ۴a = -۴ \Rightarrow a = -۱ \Rightarrow -۱ + b = ۲ \Rightarrow b = ۳$$



۷) نامساوی مقابل را ثابت نمایید: $\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$

(تهران مرکزی نیم‌سال اول ۹۱—۹۰)

حل چون تابع $f(x) = \arctan x$ در بازهٔ $[a,b]$ در شرایط قضیهٔ مقدار میانگین مشتق صدق می‌کند، پس حداقل یک $0 < a < c < b$ موجود است که

$$a^2 < c^2 < b^2 \Rightarrow 1+a^2 < 1+c^2 < 1+b^2 \Rightarrow \frac{1}{1+a^2} > \frac{1}{1+c^2} > \frac{1}{1+b^2}$$

از طرفی $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{1}{1+c^2} = f'(c)$ بنابراین داریم:

$$\frac{1}{1+a^2} > \frac{\arctan b - \arctan a}{b-a} > \frac{1}{1+b^2}$$

که با ضرب طرفین نامعادله در عدد مثبت $b-a$ نتیجه حاصل می‌گردد.

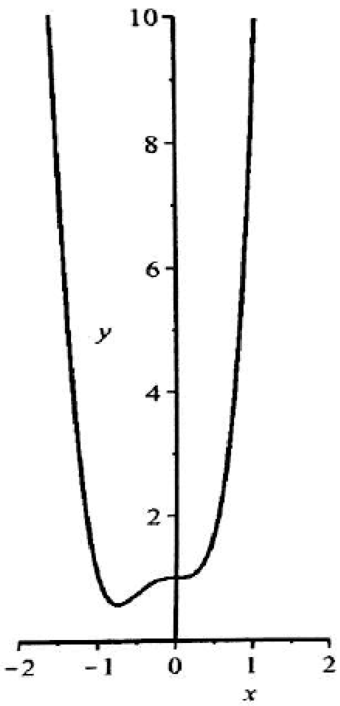
$$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$$

۸) نمودار تابع $f(x) = 4x^4 + 4x^3 + 1$ را رسم نمایید.

حل داریم: $D_f = \mathbb{R}$. حال از تابع مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم تا نقاط بحرانی به‌دست آید و سپس مشتق اول را تعیین علامت می‌کنیم تا بازه‌های صعودی و نزولی مشخص گردد و با استفاده از آزمون مشتق اول نوع نقاط اکسترمم را تعیین می‌کنیم:

$$f'(x) = ۱۶x^۳ + ۱۲x^۲ = ۰ \Rightarrow ۴x^۲(۴x+۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = -\frac{۳}{۴} \end{cases}$$

x	$-\infty$		$-\frac{۳}{۴}$		۰		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{۳۷}{۶۴}$ min	$\nearrow$	۱ اکسترمم نیست	$\nearrow$	



برای یافتن نقاط عطف، از تابع دو بار مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم تا نقاط عطف به‌دست آید:

$$f''(x) = ۴۸x^۲ + ۲۴x = ۰$$

$$\Rightarrow ۲۴x(۲x+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

x	$-\infty$		$-\frac{۱}{۲}$		۰		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
$f(x)$		$\cup$	$\frac{۱}{۲}$ عطف	$\cap$	۰ عطف	$\cup$	